



Gradientenverfahren und CG-Verfahren

Gegeben sei die Matrix A und der Vektor b

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ -8 & 12 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$. Die exakte Lösung ist gegeben durch

$$x = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,15 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe

1. Begründen Sie, warum das Gradientenverfahren und das CG-Verfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems angewendet werden darf.
2. Führen Sie die ersten beiden Schritte des Gradientenverfahrens aus (Algorithmus 1). Verwenden Sie als Startvektor den Nullvektor.
3. Zeigen Sie, dass die Suchrichtungen $r_{(0)}$ und $r_{(2)}$ parallel sind und die Suchrichtungen $r_{(0)}$ und $r_{(1)}$ orthogonal zueinander sind.
4. Lösen Sie das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit dem CG-Verfahren (Algorithmus 2). Verwenden Sie ebenfalls den Nullvektor als Startvektor. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit denen aus Teilaufgabe 2.

Algorithmen

Die Verfahrensvorschrift zur Lösung von linearen Gleichungssystemen mit dem Gradientenverfahren ist in Algorithmus 1 dargestellt.

Algorithmus 1: Gradientenverfahren

Input : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $x_{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$

```
1  $r_{(0)} = b - A \cdot x_{(0)}$ 
2 for  $k$  from 0 to  $m$  do
3    $\alpha_{(k)} = \frac{r_{(k)}^T \cdot r_{(k)}}{r_{(k)}^T \cdot A \cdot r_{(k)}}$ 
4    $x_{(k+1)} = x_{(k)} + \alpha_{(k)} \cdot r_{(k)}$ 
5    $r_{(k+1)} = r_{(k)} - \alpha_{(k)} \cdot A \cdot r_{(k)}$ 
6 end
```



Die Verfahrensvorschrift zur Lösung von linearen Gleichungssystemen mit dem CG-Verfahren (Conjugate Gradients (Verfahren der konjugierten Gradienten)) ist in Algorithmus 2 dargestellt. Im Vergleich zum Gradientenverfahren konvergiert das CG-Verfahren nach spätestens n Schritten zur exakten Lösung, wobei n die Größe der quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist.

Algorithmus 2: CG-Verfahren

Input : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $x_{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$

```
1  $r_{(0)} = b - A \cdot x_{(0)}$ 
2  $p_{(0)} = r_{(0)}$ 
3 for  $k$  from 0 to  $n$  do
4    $\alpha_{(k)} = \frac{r_{(k)}^T \cdot r_{(k)}}{p_{(k)}^T \cdot A \cdot p_{(k)}}$ 
5    $x_{(k+1)} = x_k + \alpha_{(k)} \cdot p_{(k)}$ 
6    $r_{(k+1)} = r_{(k)} - \alpha_{(k)} \cdot A \cdot p_{(k)}$ 
7    $\beta_{(k)} = -\frac{r_{(k+1)}^T \cdot A \cdot p_{(k)}}{(A \cdot p_{(k)})^T \cdot p_{(k)}}$ 
8    $p_{(k+1)} = r_{(k+1)} + \beta_{(k)} \cdot p_{(k)}$ 
9 end
```



Lösung

1. Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ muss symmetrisch und positiv definit sein. Eine symmetrische Matrix ist spiegelsymmetrisch bezüglich ihrer Hauptdiagonale, das heißt, es gilt

$$A = A^T,$$

wobei A^T die transponierte Matrix ist. Eine symmetrische Matrix A ist positiv definit, wenn alle Eigenwerte von A positiv sind ($\lambda > 0$). Zur Bestimmung der Eigenwerte von A wird zuerst das charakteristische Polynom aufgestellt

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda \cdot I) \\ &= (12 - \lambda) \cdot (12 - \lambda) - (-8) \cdot (-8) \\ &= \lambda^2 - 24 \cdot \lambda + 80 \end{aligned}$$

Aus den Nullstellen des charakteristischen Polynom folgen die Eigenwerte der Matrix A

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \lambda^2 - 24 \cdot \lambda + 80 = 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 &= 4, \lambda_2 = 20 \end{aligned}$$

2. Suchrichtung $r_{(0)}$:

$$r_{(0)} = b - A \cdot x_{(0)} = \dots = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Schrittweite $\alpha_{(0)}$:

$$\alpha_{(0)} = \frac{r_{(0)}^T \cdot r_{(0)}}{r_{(0)}^T \cdot A \cdot r_{(0)}} = \dots = \frac{1}{12}$$

Iterierte $x_{(1)}$:

$$x_{(1)} = x_0 + \alpha_{(0)} \cdot r_{(0)} = \dots = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,08333 \end{bmatrix}$$

Suchrichtung $r_{(1)}$:

$$r_{(1)} = r_{(0)} - \alpha_{(0)} \cdot A \cdot r_{(0)} = \dots = \begin{bmatrix} 0,66667 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Schrittweite $\alpha_{(1)}$:

$$\alpha_{(1)} = \frac{r_{(1)}^T \cdot r_{(1)}}{r_{(1)}^T \cdot A \cdot r_{(1)}} = \dots = \frac{0,44444}{5,33333} = 0,08333$$

Iterierte $x_{(2)}$:

$$x_{(2)} = x_1 + \alpha_{(1)} \cdot r_{(1)} = \dots = \begin{bmatrix} 0,05556 \\ 0,08333 \end{bmatrix}$$

Suchrichtung $r_{(2)}$:

$$r_{(2)} = r_{(1)} - \alpha_{(1)} \cdot A \cdot r_{(1)} = \dots = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,44444 \end{bmatrix}$$



3. Zwei Vektoren sind dann zueinander parallel, wenn der Betrag von dem Vektor, der sich aus dem Kreuzprodukt ergibt, Null ist.

$$a \times b = 0 \Leftrightarrow a \parallel b$$

Damit folgt

$$r_{(0)} \times r_{(2)} = \det(r_{(0)} r_{(2)}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0,44444 \end{pmatrix} = 0$$

Zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander (sind orthogonal), wenn ihr Skalarprodukt Null ist.

$$a \circ b = 0 \Leftrightarrow a \perp b$$

Damit folgt

$$r_{(0)} \circ r_{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0,66667 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

4. Iterierte $x_{(1)}$:

$$x_{(1)} = x_0 + \alpha_{(0)} \cdot p_{(0)} = \dots = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,08333 \end{bmatrix}$$

Iterierte $x_{(2)}$:

$$x_{(2)} = x_1 + \alpha_{(1)} \cdot p_{(1)} = \dots = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,15 \end{bmatrix}$$

Im Vergleich zum Gradientenverfahren konvergiert das CG-Verfahren nach zwei Iterationen zur exakten Lösung.

Copyright



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.